Circuits logiques combinatoires

Introduction

L'algèbre de Boole des fonctions logiques permet de réaliser des fonctions sur des variables d'entrées d'un circuit numérique en exprimant son état de sortie en fonction des conditions d'entrées. Elle utilise des techniques algébriques pour traiter les expressions à deux valeurs de la logique des propositions.

L'algèbre de Boole trouve des applications dans plusieurs domaines et particulièrement dans la conception des circuits électroniques et dans l'informatique. Pour réaliser une fonction logique, on utilise des portes logiques qui sont des composants électroniques se présentant sous la forme de circuits intégrés.

Règles de l'algèbre de Boole

L'algèbre de Boole repose sur un ensemble de règles de base :

- Les postulats (Tableau 1)
- Les théorèmes pour une seule variable (Tableau 2)
- Les lois pour plusieurs variables (Tableau 3).

Postulats
$\overline{0} = 1$
$\overline{1} = 0$
$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 1$
$0 \times 0 = 0$
$0 \times 1 = 0$
$1 \times 0 = 0$
$1 \times 1 = 1$

Tableau 1 : Postulats de l'algèbre de Boole

Théorèmes pour une seule variable
$A + 1 = 1$
$A + 0 = A$
$A + A = A$
$A + \overline{A} = 1$
$A \times 1 = A$
$A \times 0 = 0$
$A \times A = A$
$A \times \overline{A} = 0$

Tableau 2 : Théorèmes pour une seule variable

Lois pour plusieurs variables	
Commutativité	A + B = B + A A x B = B x A
Associativité	A + (B + C) = (A + B) + C A x (B x C) = (A x B) x C
Distributivité	(A + B) x (B + C) = (A x B) + (A x C) + (B x B) + (B x C) A x (B + C) = (A x B) + (A x C)

Tableau 3 : Lois pour plusieurs variables

Lois de De Morgan : La première et la deuxième loi de De Morgan sont des règles qui définissent respectivement la négation d'une somme logique et la négation d'un produit logique.

Première loi de De Morgan : Si A et B sont deux propositions pouvant être vraies ou fausses et si l'on note :

- $\overline{A}$ la négation de A
- $\overline{B}$ la négation de B

Nier A ou B, c'est nier A et nier B (ni A ni B) d'où la **première loi de De Morgan** : La négation d'une addition logique de deux variables booléennes A et B est équivalent à un produit de la négation de chacune des variables.

$$\overline{A+B} = \bar{A} \times \overline{B}$$

Deuxième loi de De Morgan : Tout en gardant la même notation que précédemment, nier la coexistence de A et de B, c'est nier A ou nier B d'où la **deuxième loi de De Morgan** : La négation d'un produit logique de deux variables A et B peut être écrite sous la forme d'une somme logique de la négation des deux variables.

$$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Remarque : Les deux lois de De Morgan sont applicables pour plus que deux variables. On peut donc, par exemple, écrire pour trois variables :

$$\overline{A+B+C} = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$$

$$\overline{A.B.C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

Loi de l'absorption logique : Dans expression logique, si une variable logique A est additionnée à un produit où A est présente, l'expression est réduite à la variable A. De même, si une variable A est multipliée par une addition où A est présente, l'expression ne dépendra que de A.

- A + A.B = A
- A. (A + B) = A

En effet, A + A.B = A (1 + B)= A x1 (Puisque 1+B = 1) et Ax1=A et donc A + A.B = A. D'autre part, A. (A+B) = A A+(A.B) = A + AB (Puisque A.A= A) et A + AB = A (1 + B) = A.1 = A

Loi de l'adjacence logique : Cette loi permet de simplifier la somme de deux produits où une variable A et sa négation sont présentes dans les deux produits**.**

- $A.B + A.\bar{B} = A$
- $(A+B).(A+\bar{B}) = A$

En effet, $A.B + A.\bar{B} = A(B + \bar{B}) = A$ puisque $B + \bar{B} = 1$. D'autre part, $(A+B).(A+\bar{B}) = A.A + A.\bar{B} + B.A + B.\bar{B} = A + A.\bar{B} + B.A + 0 = A(1+\bar{B}) = A$, car $1+\bar{B} = 1$

Les opérateurs logiques :

Les opérateurs logiques sont en général des opérateurs électroniques se présentant sous la forme de circuits intégrés. Les boîtiers contenant les opérateurs sont pourvus d'un certain nombre de connexions (pattes ou broches), nécessitent pour fonctionner une alimentation électrique.

Les opérateurs logiques usuels sont les suivants:

- ET (AND)
- OU (OR) également appelé OU inclusif
- Inverseur
- NAND (ET complémenté)
- NOR (OU complémenté)
- OU Exclusif (XOR)

La figure 1 donne les symboles courants et normalisés par l'**IEC** (**I**nternational **E**lectrotechnical **C**ommission).

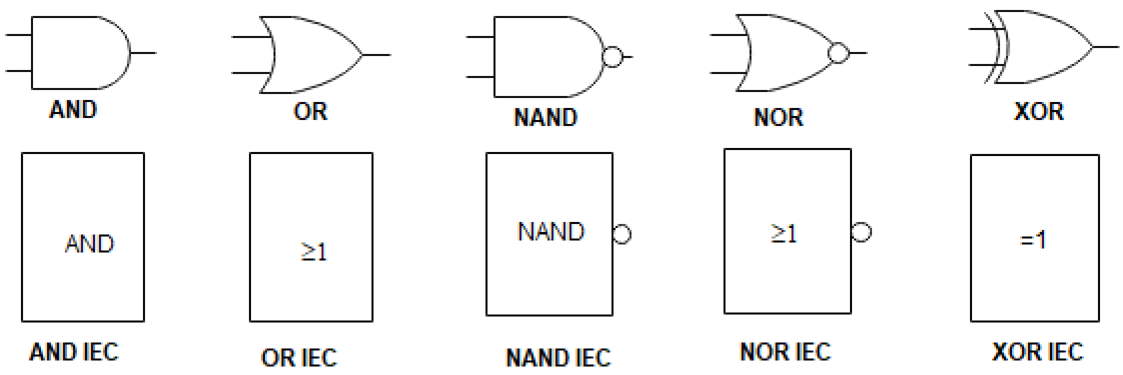

Figure 1 : Symboles courants et normlisés IEC des opérateurs logiques usuels

Etude de l'opérateur logique AND

- L’expression logique de l’opérateur AND est de la forme S = X . Y où X et Y sont deux variables d’entrées et S la sortie.
- La table de vérité de l’opérateur AND est la suivante :

X	Y	S = X . Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Table de vérité de AND

Cas particuliers

- $X . X = X$
- $X . 1 = X$
- $X . 0 = 0$
- $X . \bar{X} = 0$

Etude de l’opérateur logique OR

- L’expression logique de l’opérateur OR est de la forme S = X + Y où X et Y sont deux variables d’entrées et S la sortie.
- La table de vérité de l’opérateur OR est la suivante :

X	Y	S = X + Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Table de vérité de OR

Cas particuliers

- $X + X = X$
- $X + 1 = 1$
- $X + 0 = X$
- $X + \bar{X} = 1$

Etude de l’opérateur logique NAND

- L'expression logique de l'opérateur NAND est de la forme S = $\overline{X.Y}$ où X et Y sont deux variables d'entrées et S la sortie.
- La table de vérité de l'opérateur NAND est la suivante :

X	Y	S = $\overline{X.Y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Table de vérité de NAND

Cas particuliers

- X NAND X = $\overline{X}$
- X NAND $\overline{X}$ = 1
- X NAND 1 = $\overline{X}$
- X NAND 0 = 1

Etude de l'opérateur logique NOR

- L'expression logique de l'opérateur NOR est de la forme S = $\overline{X+Y}$ où X et Y sont deux variables d'entrées et S la sortie.
- La table de vérité de l'opérateur NOR est la suivante :

X	Y	S = $\overline{X+Y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Table de vérité de NOR

Cas particuliers

$X \text{ NOR } X = \bar{X}$

$X \text{ NOR } \bar{X} = 0$

$X \text{ NOR } 1 = 0$

$X \text{ NOR } 0 = \bar{X}$

Etude de l’opérateur logique XOR (OU Exclusif)

- L’expression logique de l’opérateur XOR est de la forme $S = X \oplus Y$ où X et Y sont deux variables d’entrées et S la sortie.
- La table de vérité de l’opérateur XOR est la suivante :

X	Y	$S = X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Table de vérité de XOR

Simplification des fonctions logiques

La simplification des fonctions logiques consiste à réduire le nombre de termes dans une fonction et le nombre de variables dans un terme pour réduire le nombre de portes logiques utilisées et par voie de conséquence le coût du circuit.

Simplification par la méthode algébrique : Les règles les plus utilisées sont les suivantes :

$X . Y + \bar{X}.Y = Y(X + \bar{X}) = Y.1 = Y$

$X + X.Y = X(1 + Y) = X.1 = X$

$X + \bar{X}.Y = X + Y$

$$
\begin{aligned}
(X + Y)(X + \bar{Y}) = X.X + X.\bar{Y} + Y.X + Y.\bar{Y} &= X + X.\bar{Y} + Y.X + 0 \\
&= X(1 + \bar{Y}) + Y.X \\
&= X.1 + Y.X \\
&= X + Y.X \\
&= X(1 + Y) \\
&= X.1 = X
\end{aligned}
$$

Exercices d’application

Simplifier algébriquement les expressions suivantes :

1. $XYZ + XY\bar{Z} + X\bar{Y}ZU$
2. $XYZ + \bar{X}YZ + X\bar{Y}Z + XY\bar{Z}$
3. $XY + \bar{Y}Z + XZ$

Corrigés

1. $XYZ + XY\bar{Z} + X\bar{Y}ZU = XY(Z + \bar{Z}) + X\bar{Y}ZU$
$= XY + X\bar{Y}ZU$
$= X(Y + \bar{Y}(ZU))$
$= X(Y + ZU)$

2. $XYZ + \bar{X}YZ + X\bar{Y}Z + XY\bar{Z} = XYZ + \bar{X}YZ + X\bar{Y}Z + XY\bar{Z} + XYZ + XYZ$
$= XYZ + \bar{X}YZ + XYZ + X\bar{Y}Z + XYZ + XY\bar{Z}$
$= YZ \qquad + XZ \qquad + XY$

3. $XY + \bar{Y}Z + XZ = XY + \bar{Y}Z + XZ(Y + \bar{Y})$
$= XY + \bar{Y}Z + XZY + XZ\bar{Y}$
$= XY(1 + Z) + \bar{Y}Z(1 + X)$
$= XY \qquad + \bar{Y}Z$

Simplification par la méthode des tables de Karnaugh : Il s'agit d'un tableau à double entrées et dans lequel chaque combinaison des variables d'entrée est associée à une case qui contient la valeur de la fonction. La construction du tableau nécessite que la disposition des cases soit telle que deux cases contiguës correspondent à des combinaisons adjacentes des variables d'entrée (combinaisons contiguës ne doivent différer que par la complémentation d'une seule variable).

Exemple de construction d'une table de Karnaugh à quatre entrées

A / B — C D	0 / 0	0 / 1	1 / 1	1 / 0
0 0				
0 1				
1 1				
1 0				

Construction d'un tableau de Karnaugh à quatre variables

Une fois le tableau construit, on remplit les cases par 1 quand la fonction est égale a 1 et par 0 autrement. Ensuite, on repère les 1 contigus et on effectue la simplification correspondante.

Exercices d'application

1. Simplifier par le tableau de Karnaugh la fonction suivante :

$$S1 = \bar{A}.B + A.B + A.\bar{B}$$

2. Simplifier la fonction S2 donnée par la table de Karnaugh suivante :

A / B — C D	0 / 0	0 / 1	1 / 1	1 / 0
0 0	1	0	0	1
0 1	0	0	1	0
1 1	0	1	1	0
1 0	1	1	1	1

Table de Karnaugh de S2

Corrigés

1. S1 est fonction de deux variables puisque l'expression de S1 est donnée par :

$$S1 = \bar{A}.B + A.B + A.\bar{B}$$

Soit la table suivant:

B \ A	0	1
0	0	1
1	1	1

Table de Karnaugh de S1

Apres regroupement des 1 comme indique, on obtient :

$$S1 = A + B$$

2. on repère les 1 contigus et on fait la simplification.

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	1	0
11	0	1	1	0
10	1	1	1	1

Table de Karnaugh de S2

On obtient :

$$S2 = BC + \bar{B}\bar{D} + ABD$$